

УДК 531.37; 538.31	
Григор'єва Л.В., аспірантка	Grigoryeva L.V., postgraduate student
Динамічна модель вільного тіла в центральних або нецентральных фізичних полях та її Maple-аналіз	Dynamic Model of a Free Body in Central or Non-Central Physical Fields and Its Maple-Simulation Tools
<i>Розроблено інструментарій для нелінійної динамічної системи 12-го порядку, що узагальнює рух вільного тіла в гравітаційному, електричному або магнітному полях.</i>	<i>Maple simulation tools for the 12th-order nonlinear dynamic system model generalizing a free body motion in gravitational, electric or magnetic fields is developed.</i>
<i>Ключові слова: вільне тіло, нелінійні динамічні моделі, система Maple.</i>	<i>Key words: free body, nonlinear dynamic models, software Maple.</i>
<p>¹E-mail: l.v.grigoryeva@gmail.com Статтю представив член-кореспондент НАНУ, доктор фіз.-мат. наук, професор Ляшко С.І.</p>	
<p>Нехай точкові джерела силового фізичного поля (заряди) q_1, q_2 закріплені на осі Oz інерціального тригранника $Oxyz$ на відстанях l_1, l_2 від його начала O, а q_3, q_4 – на осі O_1z_1 тригранника $O_1x_1y_1z_1$ на відстанях l_3, l_4 від начала O_1, розташованого у центрі мас вільного тіла (рис. 1).</p>	<p>Let the point sources (charges) q_1, q_2 of a physical force field fixed on Oz-axis of the inertial trihedron $Oxyz$ be l_1, l_2-distant from the origin O, and let the sources q_3, q_4 fixed on O_1z_1-axis of the trihedron $O_1x_1y_1z_1$ be l_3, l_4-distant from the origin O_1 coincided with the free body mass center (Fig. 1).</p>
<p>Законом потенціальної енергії парної взаємодії кожного нерухомого джерела з кожним джерелом на вільному тілі вважатимемо закон оберненої відстані між ними ($R_{13}, R_{14}, R_{23}, R_{24}$ на рис.1). Йому відповідають закони Ньютона і Кулона. Довільність величин і знаків зарядів q_i та відстаней l_i ($i=1, \dots, 4$) дозволяє моделювати як центральні силові поля, (ними можуть бути гравітаційне або електричне поле), так і нецентральної, яким є поле магнітне. Для магнітної взаємодії необхідно виконати умову нульових сум нерухомих зарядів і зарядів вільного тіла.</p>	<p>The inverse distance ($R_{13}, R_{14}, R_{23}, R_{24}$ in fig.1) law of interaction between any immobile source and a source fixed on the free body is considered as the potential energy law of any pairwise interaction. This is in agreement with Newton's law of gravity and Coulomb's law in electricity. Arbitrary values and signs of charges q_i and distances l_i ($i=1, \dots, 4$) allow modeling both central force fields (e.g. gravity or electrical field) and non-central ones e.g. magnetic fields. In the last case the condition of zero sums of the immobile charges pair and free body's charges pair must be satisfied.</p>
<p>Тоді система точкових зарядів на рис. 1 відповідатиме або віддаленим магнітам або довгим намагніченим циліндрам [1,2].</p>	<p>Then the point charges system represented in Fig.1 can be corresponded with two arbitrary removed magnets or two long cylindrical magnets [1,2].</p>
<p>Дипольна взаємодія визначатиметься нульовою відстанню між нерухомими зарядами і зарядами вільного тіла, але обмеженою величиною добутків зарядів на відстань між ними. У випадку довгих намагнічених циліндрів відстані між відповідними парами зарядів є ненульові і обмежені зверху величини.</p>	<p>At that the dipole interaction is determined by zero distance between the pair of immobile charges and the body's pair of charges and along with that the product values of charges and corresponding distances must be bounded above. The distances between immobile charges pair and body's charges pair are non-zero and bounded above in a case of long cylinders.</p>
<p>2008, 1 © Григор'єва Л.В.</p>	

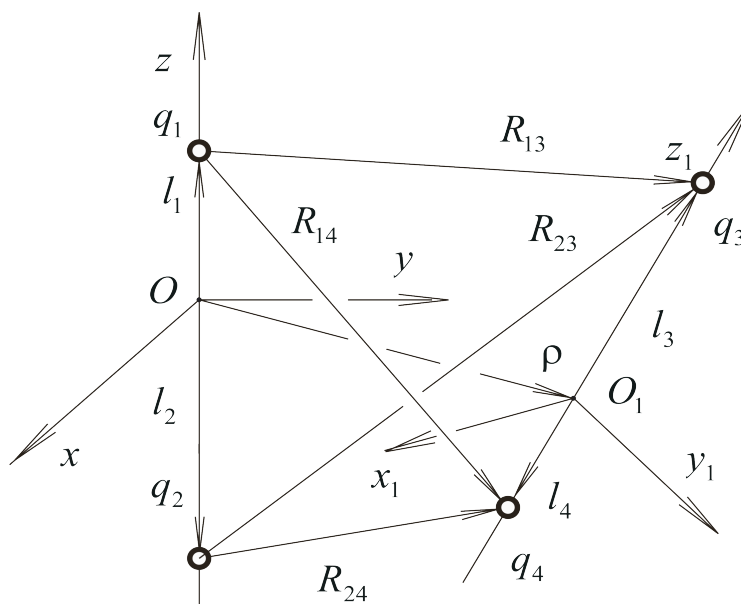


Рис. 1. Fig. 1.

Нехай степенями свободи вільного тіла є декартові координати x, y, z точки O_1 та кути Ейлера-Крилова α, β, γ , що визначають просторову орієнтацію тригранника $O_1x_1y_1z_1$ відносно $Oxyz$. Тоді, використовуючи матрицю направляючих косинусів (див., наприклад, [3]) та закон оберненої відстані взаємодії введених зарядів, для потенціальної енергії вільного тіла можна отримати вираз:

$$\begin{aligned}
 U = & q_1q_3 \left((x + l_2 \sin \beta)^2 + (y - l_2 \sin \alpha \cos \beta)^2 + \right. \\
 & \left. + (z - l_1 + l_2 \cos \alpha \cos \beta)^2 \right)^{1/2} + \\
 & + q_1q_4 \left((x - l_4 \sin \beta)^2 + (y + l_4 \sin \alpha \cos \beta)^2 + \right. \\
 & \left. + (z - l_1 - l_4 \cos \alpha \cos \beta)^2 \right)^{1/2} + \\
 & + q_2q_3 \left((x + l_2 \sin \beta)^2 + (y - l_2 \sin \alpha \cos \beta)^2 + \right. \\
 & \left. + (z + l_3 + l_2 \cos \alpha \cos \beta)^2 \right)^{1/2} + \\
 & + q_2q_4 \left((x - l_4 \sin \beta)^2 + (y + l_4 \sin \alpha \cos \beta)^2 + \right. \\
 & \left. + (z + l_3 - l_4 \cos \alpha \cos \beta)^2 \right)^{1/2}
 \end{aligned} \quad (1)$$

Формула (1) та закони класичної механіки [3,4] дозволяють отримати рівняння руху вільного тіла. Якщо динамічними змінними є узагальнені координати (степені свободи) і узагальнені швидкості, зручно використати рівняння Лагранжа та відомі формули кінетичної енергії вільного тіла. В методі Ньютона-Ейлера замість частини швидкостей використовують проєкції вектора кутової

Let the Cartesian coordinates x, y, z of point O_1 and Euler-Krylov angles α, β, γ determining space orientation of $O_1x_1y_1z_1$ trihedron connected with free body relatively to the inertial $Oxyz$ trihedron be chosen as six degrees of freedom of the free body. By applying the matrix of direction cosines (see e.g. [3]) and the said inverse potential energy law of pairwise interaction introduced above, for the potential energy of the free body we can obtain:

$$\begin{aligned}
 U = & q_1q_3 \left((x + l_2 \sin \beta)^2 + (y - l_2 \sin \alpha \cos \beta)^2 + \right. \\
 & \left. + (z - l_1 + l_2 \cos \alpha \cos \beta)^2 \right)^{1/2} + \\
 & + q_1q_4 \left((x - l_4 \sin \beta)^2 + (y + l_4 \sin \alpha \cos \beta)^2 + \right. \\
 & \left. + (z - l_1 - l_4 \cos \alpha \cos \beta)^2 \right)^{1/2} + \\
 & + q_2q_3 \left((x + l_2 \sin \beta)^2 + (y - l_2 \sin \alpha \cos \beta)^2 + \right. \\
 & \left. + (z + l_3 + l_2 \cos \alpha \cos \beta)^2 \right)^{1/2} + \\
 & + q_2q_4 \left((x - l_4 \sin \beta)^2 + (y + l_4 \sin \alpha \cos \beta)^2 + \right. \\
 & \left. + (z + l_3 - l_4 \cos \alpha \cos \beta)^2 \right)^{1/2}
 \end{aligned} \quad (1)$$

Formula (1) and laws of classical mechanics [3,4] allow deriving the free body motion differential equations. If generalized coordinates (degrees of freedom) and generalized velocities are chosen as dynamic variables, it is proper to use the Lagrange's equations and known formulae for kinetic energy of a free body. To apply the Newton-Euler method angular velocity vector projections onto free body's axes are commonly used instead of part of

<p>швидкості вільного тіла на зв'язані з ним осі. Скориставшись методом Ньютона-Ейлера і формулою (1), можна отримати таку консервативну динамічну модель вільного тіла:</p>	<p>generalized velocities. The following conservative dynamic model for a free body is derived from the Newton-Euler method and formula (1):</p>
$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -A \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -A \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= -A \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{dn_1}{dt} + k_1 n_3 n_2 &= -A_1 \frac{\partial u}{\partial x_4}, \\ \frac{dn_2}{dt} - k_1 n_1 n_3 &= -A_1 \frac{\partial u}{\partial x_5}, \\ \frac{dn_3}{dt} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$ $\begin{aligned} n_1 &= \cos x_5 \cos x_6 \frac{dx_4}{dt} + \sin x_6 \frac{dx_5}{dt}, \\ n_2 &= -\cos x_5 \sin x_6 \frac{dx_4}{dt} + \cos x_6 \frac{dx_5}{dt}, \\ n_3 &= \sin x_5 \frac{dx_4}{dt} + \frac{dx_6}{dt}. \end{aligned}$	$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -A \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -A \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= -A \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{dn_1}{dt} + k_1 n_3 n_2 &= -A_1 \frac{\partial u}{\partial x_4}, \\ \frac{dn_2}{dt} - k_1 n_1 n_3 &= -A_1 \frac{\partial u}{\partial x_5}, \\ \frac{dn_3}{dt} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$ $\begin{aligned} n_1 &= \cos x_5 \cos x_6 \frac{dx_4}{dt} + \sin x_6 \frac{dx_5}{dt}, \\ n_2 &= -\cos x_5 \sin x_6 \frac{dx_4}{dt} + \cos x_6 \frac{dx_5}{dt}, \\ n_3 &= \sin x_5 \frac{dx_4}{dt} + \frac{dx_6}{dt}. \end{aligned}$
<p>де $x_4 = \alpha$, $x_5 = \beta$, $x_6 = \gamma$, $A = q^2 (ml^3 w^2)^{-1}$ – параметр, що позначає відношення характерної енергії поля до характерної кінетичної енергії поступального руху $ml^2 w^2$ ($l = \max_{i=1,\dots,4} l_i$ – характерна довжина, $q = \max_{i=1,\dots,4} q_i$ – характерна абсолютна величина заряду, m – маса вільного тіла), $k_1 = (I_3 - I_1) I_1^{-1}$ – відношення головних центральних моментів інерції вільного тіла (взято випадок динамічної симетрії $I_1 = I_2$), I_1, I_3 – два головні центральні моменти інерції вільного тіла; $A_1 = q^2 (I_1 l w^2)^{-1}$ – відношення характерних енергії поля та кінетичної енергії обертання з моментом інерції I_1. Рівняння (2) стосуються випадку розміщення зарядів вільного тіла на осі його динамічної симетрії. Система (2) досить складна для аналізу відомими аналітичними методами. Більш зручно скористатись CAS Maple11 [5], що дозволяє отримати чисельні розв'язки задачі Коші і будувати фазові портрети. Не приводячи текст відповідної програми для економії місця, приведемо деякі результати Maple-аналізу. Спочатку про задачу двох тіл. У цьому</p>	<p>here $x_4 = \alpha$, $x_5 = \beta$, $x_6 = \gamma$, $A = q^2 (ml^3 w^2)^{-1}$ is the ratio between the characteristic force field energy and characteristic kinetic energy $ml^2 w^2$ of the free body forward motion ($l = \max_{i=1,\dots,4} l_i$ is the characteristic length, $q = \max_{i=1,\dots,4} q_i$ is the characteristic modulus quantity of charge, m is the free body mass), $k_1 = (I_3 - I_1) I_1^{-1}$ is the ratio between main central moments of free body inertia (the case of dynamic symmetry $I_1 = I_2$), parameters I_1, I_3 are two main center moments of free body inertia; $A_1 = q^2 (I_1 l w^2)^{-1}$ is the ratio between the characteristic force field energy and characteristic kinetic energy of free body rotation with I_1 as moment of inertia. Equations (2) are proper when the free-body pair of charges is placed on a body's dynamic symmetry axis. System (2) is too complicated to be analyzed by the known analytical methods. It is more convenient to use CAS Maple 11 [5] capable of deriving numerical solutions for the Cauchy problem and to plot phase portraits. Omitting Maple-script source, we present some results of the Maple-analysis only. The first to discuss is the classical two-body</p>

випадку q_i є або точковим електричним зарядом, або точковою масою. Якщо $l_1 = 0, l_2 = 0, q_1 = m_1, q_2 = 0, q_3 = m_2, q_4 = 0, m = m_2$, формула (1) матиме вигляд:

$$U = -\frac{m_1 m_3}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (3)$$

problem. In this case q_i is either point electrical charge or point mass. If $l_1 = 0, l_2 = 0, q_1 = m_1, q_2 = 0, q_3 = m_2, q_4 = 0, m = m_2$, (1) can be reduced to expression:

$$U = -\frac{m_1 m_3}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (3)$$

і для відповідних початкових умов залежність відстані до центру притягання як функція часу матиме вигляд, показаний на рис. 2.

and for corresponding initial conditions dependence of free point distance to the attractive center versus the time will be plotted as shown in Fig.2

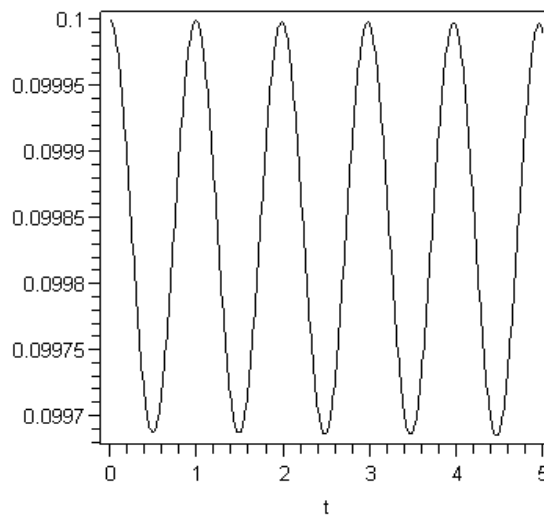


Рис. 2. Fig. 2.

Протилежні знаки зарядів у формулі (3) відповідають відомій задачі розсіювання. У випадку «гравілета» Белецького В.В. [6] маємо вільну жорстку зв'язку двох тіл мас m_1, m_2 , що рухається навколо нерухомої маси m_3 . Іншим варіантом є рух вільної маси m_3 в полі нерухомої зв'язки мас m_1 та m_2 . Всі ці варіанти також охоплюються отриманою моделлю (2) з можливістю її Maple-аналізу. Для руху вільного тіла з магнітною взаємодією довгих циліндрів (задача «двох магнітів» [1]) необхідно задовольнити умовам нульової суми зарядів і у формулі (1) покласти $l_i = l, q_i = \sigma_i \chi, i = \overline{1,4}, \sigma_i = 1$ для $i = 2,3$ і $\sigma_i = -1$ для $i = 1,4$. Деякі результати чисельного Maple-аналізу цієї задачі наведені на рис.3,4.

Opposite signs of charges in expression (3) correspond to the classic scattering problem. In the case of Beletskiy's "gravity flyer" problem of [6] two strictly connected masses m_1 and m_2 move in the immobile mass m_3 gravity field. Another version is a free point mass m_3 motion in the gravity field of two strictly connected masses m_1 and m_2 . All these variants are also enveloped by the obtained free body dynamic model (2) that can be analyzed by CAS Maple. In order to consider the problem of free body motion with magnetic interaction of long cylindrical magnets (the "two-magnet" problem [1]), one can give conditions: $l_i = l, q_i = \sigma_i \chi, i = \overline{1,4}, \sigma_i = 1$ for $i = 2,3$ and $\sigma_i = -1$ for $i = 1,4$. Some results of numerical Maple-analysis for this problem are plotted on Fig. 3 and Fig. 4.

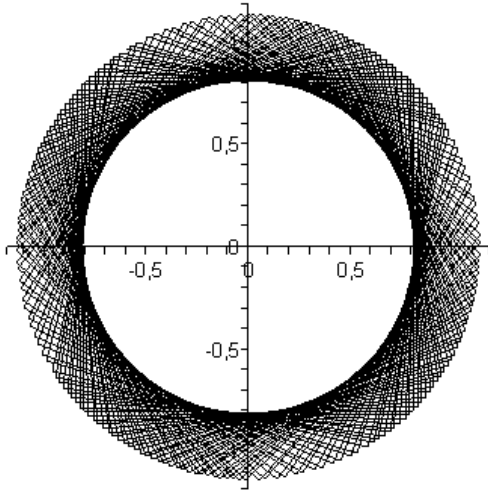


Рис. 3. Траєкторія центра мас вільного тіла в полярних координатах
Fig. 3. Free body mass centre trajectory polar plot

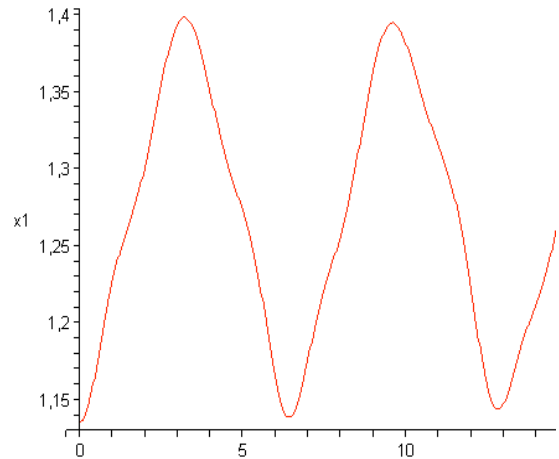


Рис. 4. Відстань центра мас до центра притягання як функція часу
Fig. 4. The centre mass distance to the attractive centre versus time

Частинним випадком задачі двох магнітів є дипольна взаємодія, яка досліджувалась у роботах Тамма [7] і Гінзбурга [8]. Для цього необхідно покласти $l \rightarrow 0$, $2l\chi \rightarrow p$, де p - магнітний момент диполя, що приводить до такого виразу для знерозміреної потенціальної енергії:

The partial case of the “two magnets” problem is dipole interaction investigated by Tamm [7] and Ginsburg [8]. In this case one must assume $l \rightarrow 0$, $2l\chi \rightarrow p$, where p is the dipole magnetic moment and this allows derivation of the non-dimensional expression for the free body potential energy:

$$u = -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (3yz \sin \alpha \cos \beta + (x^2 + y^2 - 2z^2) \cos \alpha \cos \beta - 3xz \sin \beta) \quad (4)$$

$$u = -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (3yz \sin \alpha \cos \beta + (x^2 + y^2 - 2z^2) \cos \alpha \cos \beta - 3xz \sin \beta) \quad (4)$$

Дипольний закон взаємодії та його Maple-розв'язки задачі Коші показані на рис. 5, 6.

The dipole law and its Maple-analysis by some plots of the Cauchy problem are shown on Fig. 5, 6.

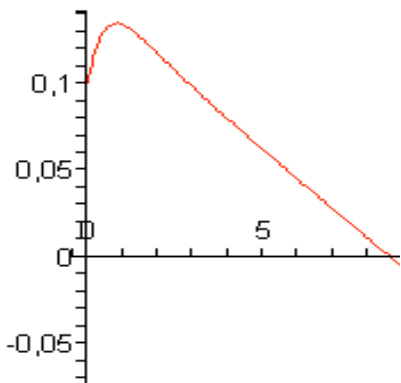


Рис. 5. Fig.5

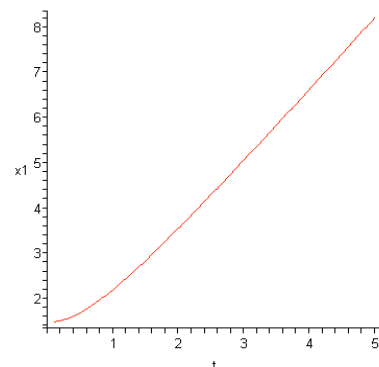


Рис. 6. Fig.6

Рис.5 відповідає падінню на центр притягання, а рис. 6 – розлітання у випадку відштовхування.

Fig. 5 demonstrates falling on the attractive centre and Fig. 6 shows solution resulting into dispersion in a case of repulsive forces.

Таким чином, модель (1)-(2) та Maple-інструментарій дозволяють аналізувати складні

Therefore, the obtained dynamic model and developed Maple-simulation tools allow analyzing

<p>задачі динаміки вільного тіла в гравітаційному, електричному або магнітному полях. Автор висловлює подяку професору Козорізу В.В. за постановку задачі і корисні поради.</p>	<p>complex nonlinear problems of the free body dynamics in gravitational, electric or magnetic fields. The author acknowledge professor Kozoriz Vasyli' for the statement of the problem and useful discussions related to the two-body problem.</p>
<p>Список використаних джерел</p> <ol style="list-style-type: none">1. Козорез В.В. Динамические системы магнитно взаимодействующих свободных тел. - К.: Наукова думка, 1981. – 140 с.2. Смайт Р. Электростатика и электродинамика.- М.: Изд-во иностр. лит., 1959.- 604 с.3. Парс Д. Аналитическая динамика. – М.: Наука, 1976. – 634 с.4. Ландау Л. Д., Лифшиц И. М. Механика.- 3-е изд. – М.: Наука, 1973.- 208 с.5. www.maplesoft.com6. Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. – М.: Наука, 1972.- 360 с.7. Тамм И.Е. Движение мезонов в электромагнитных полях. - Докл. АН СССР, 1940, 8/9, с.551-554.8. Гинзбург В.Л. Теория мезона и ядерные силы. В кн.: Мезон / Под. ред. Тамма И.Е. М.: Гостехиздат, 1947, с. 227-270.	<ol style="list-style-type: none">1. Козорез В.В. Динамические системы магнитно взаимодействующих свободных тел. - К.: Наукова думка, 1981. – 140 с.2. Smythe W.R. Static And Dynamic Electricity. McGraw-Hill, New York, 1950. - 616 p.3. Pars, L. A. A Treatise on Analytical Dynamics. Heinemann, London, 1965. – 634 p.4. Landau L.D., Lifshitz E.M., Mechanics, Course of. Theoretical Physics. Addison-Wesley, Reading, 1959. - 208 p.5. www.maplesoft.com6. Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. – М.: Наука, 1972.- 360 с.7. Тамм И.Е. Движение мезонов в электромагнитных полях. - Докл. АН СССР, 1940, 8/9, с.551-554.8. Гинзбург В.Л. Теория мезона и ядерные силы. В кн.: Мезон / Под. ред. Тамма И.Е. М.: Гостехиздат, 1947, с. 227-270.
<p>Надійшла до редколегії 03.04.08</p>	