

Л. В. Григор'єва, В. В. Козоріз, член-кореспондент НАН України
С. І. Ляшко

Maple-моделювання динаміки тіла з нерухомою точкою в полі магнітних та електричних сил

By means of the software Maple, we obtain solutions of the problems of the nonlinear dynamics of a solid body with fixed point (a spherical pendulum) under the action of forces between a magnetic dipole of the pendulum and two immovable magnetic dipoles, as well as in the case where the magnetic dipoles are replaced by electric charges.

Задачі динаміки тіла з нерухомою точкою у випадках, коли замість постійної сили ваги діють електричні або магнітні сили, мало досліджені внаслідок відомих обмежень аналітичних методів аналізу нелінійних динамічних систем. Можливості сучасних комп'ютерних технологій, зокрема, системи символьної математики Maple [1] багато обмежень знімають. Це стимулює інтерес досліджень динаміки твердого тіла за нових умов, зокрема у випадках дії на тіло магнітних або електричних сил.

Нехай початок O інерціального тригранника $Oxyz$ розміщено в центрі ідеального сферичного шарніру (точці підвісу), вісь Oy паралельна двом нерухомих магнітним диполям, розміщеним у площині Oyz на відстані T від точки підвісу O і на однакових відстанях a від осі Oz (рис. 1). Будемо вважати, що з тілом зв'язаний тригранник $O_1x'y'z'$ так, що його початок O_1 збігається з центром мас тіла та магнітним диполем, магнітний момент \vec{m} якого направлений по осі O_1y' , що є віссю одного з трьох центральних моментів інерції, а точка підвісу O розміщена на осі Oz' .

Якщо визначати просторове положення тіла кутами Ейлера–Крилова x_1, x_2, x_3 (x_1 — кут крену; x_2 — кут тангажу; x_3 — кут ширяння) між тригранниками $Oxyz$ і $O_1x'y'z'$, використати відому формулу потенціальної енергії магнітної взаємодії двох магнітних диполів (див., наприклад, [2, с. 135]) та векторні багатокутники, утворені векторами $-\vec{a}, \vec{R}_1, \vec{L}, \vec{T}$ та $\vec{a}, \vec{R}_2, \vec{L}, \vec{T}$ (рис. 1), можна отримати залежність безрозмірної потенціальної енергії магнітної взаємодії $u = UT^3m^{-3}$ від кутів x_1, x_2, x_3 як узагальнених координат

$$u = - \left\{ a_{22} \left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r_2^3} \right) + 3 \frac{(t_1 a_{22} + a_{23})(l a_{32} - t_1)}{r_1^5} + 3 \frac{(-t_1 a_{22} + a_{23})(l a_{32} + t_1)}{r_1^5} \right\}, \quad (1)$$

де U — потенціальна енергія магнітної взаємодії; m — величина магнітного моменту, який вважається однаковим для всіх диполів, а для безрозмірних відстаней між нерухомими диполями і диполем на тілі та направляючих косинусів з урахуванням відомих формул (див., наприклад, [3, с. 119]) можна отримати

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{1 + t_1^2 + l^2 - 2l(t_1 a_{32} + a_{33})}, & r_2 &= \sqrt{1 + t_1^2 + l^2 - 2l(-t_1 a_{32} + a_{33})}, \\ a_{22} &= \cos x_1 \cos x_3 - \sin x_1 \sin x_2 \sin x_3, & a_{23} &= \sin x_1 \cos x_3 + \cos x_1 \sin x_2 \sin x_3, \\ a_{32} &= -\sin x_1 \cos x_2, & a_{33} &= \cos x_1 \cos x_2. \end{aligned} \quad (2)$$

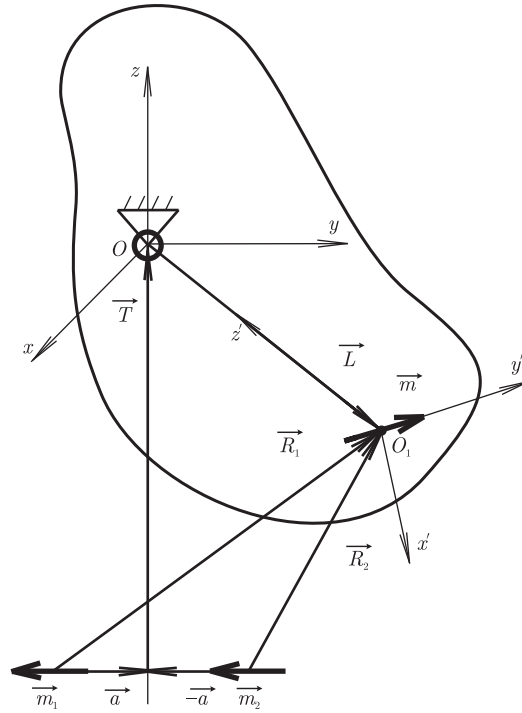


Рис. 1. Магнітний сферичний маятник

Відзначимо, що при знерозміренні всі лінійні розміри поділені на T . При цьому параметр t_1 означає половину безрозмірної відстані між нерухомими диполями, а l — безрозмірну маятниковість тіла (відстань між центром мас тіла і точкою підвісу).

Тоді динамічні та кінематичні рівняння Ейлера [3, 4] приводять до рівнянь руху тіла, які запишемо у безрозмірній формі

$$\begin{aligned} \frac{dn_1}{dt} + k_1 n_2 n_3 &= -A \frac{\partial u}{\partial x_1}, & \frac{dn_2}{dt} + k_2 n_3 n_1 &= -A \frac{\partial u}{\partial x_2}, & \frac{dn_3}{dt} + k_3 n_1 n_2 &= -A \frac{\partial u}{\partial x_3}, \\ n_1 &= \cos x_2 \cos x_3 \frac{dx_1}{dt} + \sin x_3 \frac{dx_2}{dt}, & n_2 &= -\cos x_2 \sin x_3 \frac{dx_1}{dt} + \cos x_3 \frac{dx_2}{dt}, \\ n_3 &= \sin x_2 \frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_3}{dt}, \end{aligned} \quad (3)$$

де n_1, n_2, n_3 — проекції вектора безрозмірної кутової швидкості тіла на зв'язані з ним осі; t — безрозмірний час; k_1, k_2, k_3 — константи, що визначаються трьома центральними моментами інерції тіла; A — відношення характерної потенціальної енергії магнітної взаємодії диполів та кінетичної енергії тіла.

Отже, динаміка тіла з нерухомою точкою O в магнітному полі наведеної системи магнітних диполів описується консервативною нелінійною системою диференціальних рівнянь шостого порядку (3), яка повністю визначається заданням шести параметрів k_1, k_2, k_3, A, t_1, l та початкових умов. Перші три параметри визначаються формулами

$$k_1 = \frac{I_3 - I_2}{I_1}, \quad k_2 = \frac{I_1 - I_3}{I_2}, \quad k_3 = \frac{I_2 - I_1}{I_3}, \quad (4)$$

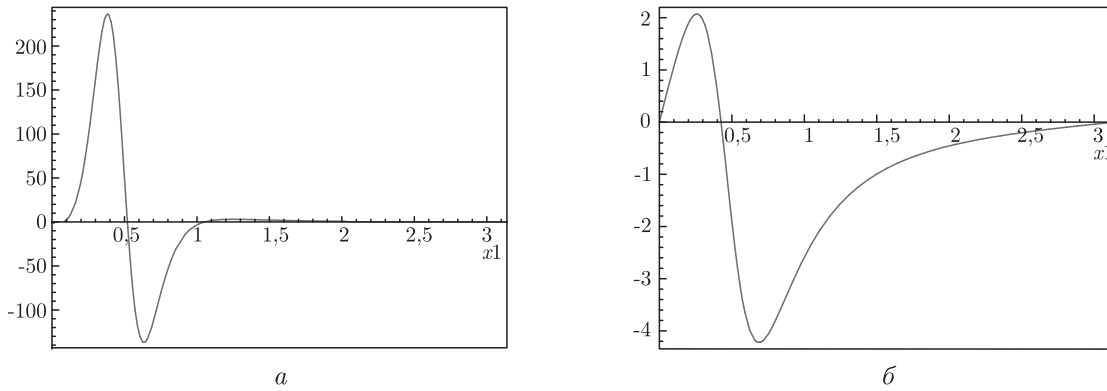


Рис. 2. Момент сили при $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $l = 0,8$; $t_1 = 0,5$: *a* — магнітного маятника; *б* — електричного маятника

де I_1 , I_2 , I_3 — центральні моменти інерції тіла відносно осей O_1x' , O_1y' , O_1z' відповідно. Параметр A може бути більшим або меншим за нуль залежно від відносної орієнтації магнітних диполів при певному положенні тіла, наприклад, коли всі диполі паралельні, а диполь тіла знаходиться нижче точки підвісу.

Якщо магнітні диполі замінити точковими електричними зарядами так, що знак заряду на тілі протилежний знаку нерухомих зарядів, замість (1) матимемо іншу формулу безрозмірної потенціальної енергії u_1

$$u_1 = \frac{U_1 T}{q^2} = -\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right), \quad (5)$$

де U_1 — потенціальна енергія взаємодії двох пар електричних зарядів, а q — величина електричного заряду, яка вважається однаковою для всіх зарядів.

Стандартні Maple-процедури знаходження похідних, побудови графіків, розв'язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь, графічного зображення розв'язків та фазових портретів [1], які не наведені для економії місця, дозволяють отримати ряд властивостей магнітної або електричної динамічної системи (рівняння (3), де замість u необхідно підставити u_1 у відповідності з (5) і врахувати (2)).

Maple-аналіз магнітної системи показує, що на відміну від добре відомих двох “стандартних” положень рівноваги маятника під дією сили ваги (верхнього та нижнього), існують ще додаткові положення рівноваги. Їх число при фіксованих $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $t_1 = 0,5$ становить від одного до трьох в діапазоні кута крену $0 < x_1 < \pi$ (рис. 2, *a*) залежно від підбору параметра l в діапазоні $0 < l < 1$. Вони є точками перетину графіків моменту магнітних сил горизонтальної осі. Більше того, “стандартні” нижні положення рівноваги є нестійкими (додатна похідна моменту в точці $x_1 = 0$), тоді як аналіз “похилих” положень рівноваги методом функцій Ляпунова свідчить про чергування серед них нестійких та стійких положень.

Для електричної системи, за умови ненульової відстані між нерухомими зарядами, також існують “похилі” положення рівноваги, але число додаткових “похилих” положень в діапазоні $0 < x_1 < \pi$ (рис. 2, *б*) не більше одного, причому воно є стійким, на відміну від нижнього положення.

Maple-розв'язки рівнянь руху та фазових портретів магнітної та електричної систем для одних і тих же значень параметрів ($l = 0,8$, $t_1 = 0,5$, $k_1 = -1$, $k_2 = 1$, $k_3 = 0$, $A = 1$) та початкових умов (всі нульові, крім кута крену, який при $t = 0$ набуває значення $x_1(0) =$

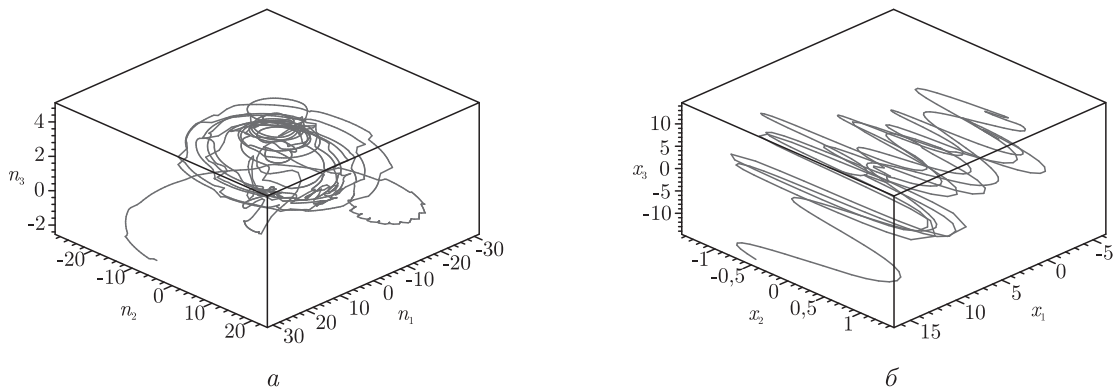


Рис. 3. Фазовий портрет магнітного маятника: *a* — для проєкцій вектора кутової швидкості n_1, n_2, n_3 ; *б* — для кутів x_1, x_2, x_3

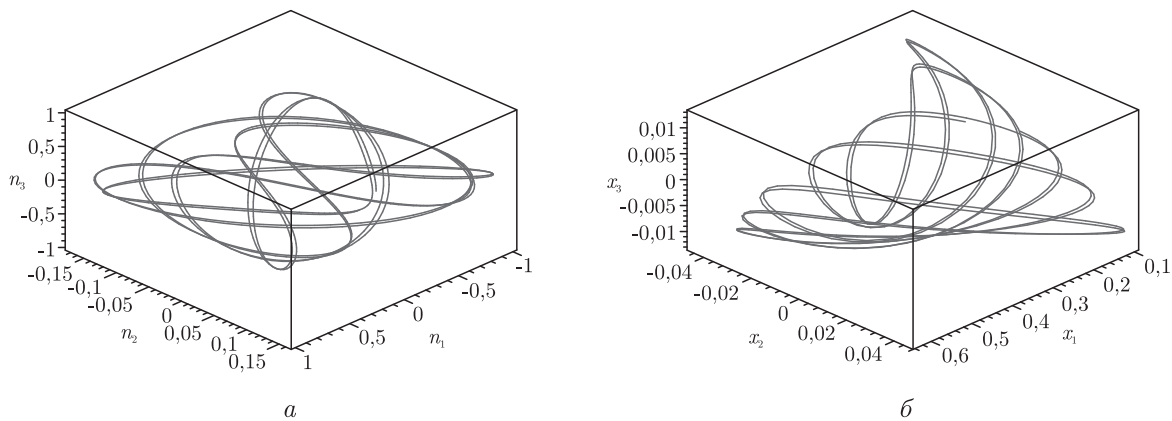


Рис. 4. Фазовий портрет електричного маятника: *a* — для проєкцій вектора кутової швидкості n_1, n_2, n_3 ; *б* — для кутів x_1, x_2, x_3

$= 0,1$) демонструють різну динамічну поведінку магнітної і електричної систем (рис. 3, 4). Найбільш суттєвим фактором, що зумовлює таку відмінність, є соленоїдальність магнітного поля, яка приводить до нецентральної силової взаємодії та іншого закону залежності магнітних сил від відстані.

Якщо для електричної системи відстань між нерухомими зарядами нульова, а їх відстань до заряду на тілі велика відносно інших лінійних розмірів, матимемо перетворення електричного маятника у “стандартний” маятник в ідеальному сферичному підвісі, розглянутий Л. А. Парсом [3, с. 71–74]. Він аналізується аналітично для випадку постійної сили ваги, за динамічні змінні взяті кути Ейлера замість розглянутих нами кутів Ейлера–Крилова, а рівняння руху отримані методом рівнянь Лагранжа замість розглянутих нами динамічних та кінематичних рівнянь Ейлера.

1. <http://www.maplesoft.com>.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. Изд. 6-е. – Москва: Наука, 1973. – 504 с.
3. Парс Л. А. Аналитическая динамика. – Москва: Наука, 1971. – 636 с.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. Изд. 3-е. – Москва: Наука, 1973. – 208 с.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 08.02.2007